#5. モノイド

モノイドの定義

モノイドとは、群の定義から逆元の存在を除いたもの。

定義 半群

演算をもつ集合 S が、その演算 $\circ$ に対して結合律

$$(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z) \quad (x, y, z \in S)$$

をみたすとき、S を半群 (semigroup) という。

定義 モノイド

半群 S がある元 $e \in S$ をもち、

$$\forall x \in S, \ e \circ x = x \circ e = x$$

をみたすならば、S をモノイド (monoid) という。

つまり、モノイドとは、演算をもつ集合で、結合律をみたし、単位元をもつもののことをいう。

モノイドを圏とみなす

- M をモノイドとし、以下のように C を定めれば、C は圏になる。
  - 対象を唯一つ $*$ とする。(ここで、$*$ に関してはなにも条件をつけていない)
    つまり、$Ob(C) := \{*\}$
  - $*$ から $*$ への射の集まりを、$Hom_C(*, *) := M$ と定める。
    つまり、モノイドの元ひとつひとつが射である。
  - 射の合成をモノイド M の積で定める。

  このようにして、モノイドを圏とみなせる。

  ∵) 上の定義は圏の定義をみたす。実際、C の射の合成はモノイド M の積だから、結合律をみたし、恒等射はモノイド M の単位元とすればよい。

- 逆に、対象が唯一つ $*$ のみの圏 C に対して、$M := Hom_C(*, *)$ として、M の二項演算を射の合成で定義すれば、射の合成は結合律をみたし、恒等射が単位元となるので、モノイド M を得る。

モノイドと群

任意の元が逆元をもつようなモノイドを群という。

モノイド M を圏 C とみなすとき、C の射 f が逆射をもつとは、(同型)

$f \in M$ が逆元をもつということである。

群は任意の元が逆元をもつモノイドだから、群とは対象が唯一つで、

全ての射が同型となるような圏といえる。

モノイド準同型

2つのモノイド $(M, \circ)$, $(M', \circ')$ の間のモノイド準同型 (monoid homomorphism)

とは、写像 $f: M \to M'$ で、

- $\forall x, y \in M$, $f(x \circ y) = f(x) \circ' f(y)$
- $f(e) = e'$ 　(e は M の、e' は M' の単位元を表す)

をみたすものをいう。

モノイド準同型はモノイド射 (monoid morphism) とよばれることもある。

全単射なモノイド準同型はモノイド同型とよばれる。

ふたつのモノイドの間にモノイド準同型が存在するとき、そのふたつの

モノイドは同型であるという。

関手としてのモノイド準同型

モノイド $(M, \circ)$, $(M', \circ')$ を圏とみなすとき、関手 $F: M \to M'$ とは

モノイド準同型のことである。

∵) 関手 F は、e を M の単位元、e' を M' の単位元 (恒等射) とすれば、

$$F(e) = e'$$

をみたす。

また、関手の定義によって、$a, b \in M$ について

$$F(a \circ b) = F(a) \circ' F(b)$$

となる。

F は M から M' への演算を保つ写像とみなせるから、

モノイド準同型といえる。 ▯

作用

演算 $\circ$ をもつモノイド M と、集合 X に関して写像

$$M \times X \to X \quad ((m, x) \mapsto mx)$$

が与えられていて、条件

(1) $(m \circ n)x = m(nx)$ $\quad (m, n \in M,\ x \in X)$

(2) $ex = x$ $\quad$ (e は M の単位元, $x \in X$)

をみたすとき、M は X に左から**作用**するという。このとき、X を**左 M-集合**という。

また、写像 $X \times M \to X$ $((x, m) \mapsto xm)$ が与えられていて、条件

(1') $x(m \circ n) = (xm)n$ $\quad (m, n \in M,\ x \in X)$

(2') $xe = x$ $\quad$ (e は M の単位元, $x \in X$)

をみたすとき、M は X に右から作用するという。

モノイドから $\mathbf{Set}$ への関手

モノイド M を圏とみなしたものを $\mathcal{C}$ とする。ここで、関手 $F: \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$ を考える。$\mathcal{C}$ の唯一の対象 $*$ に対して、$X := F(*)$ は集合である。また、$m \in M$ に対して、m は $\mathcal{C}$ の射だから、$F(m): F(*) \to F(*)$ すなわち $F(m): X \to X$ は写像である。

$x \in X$ に対して、$mx = F(m)(x)$ とかくことにする。

いま関手の定義から、$F(mn) = F(m) \circ F(n)$ である。ゆえに、

$$\begin{aligned}(mn)x = F(mn)(x) = (F(m) \circ F(n))(x) &= F(m)(F(n)(x)) \\ &= m(nx)\end{aligned}$$

となる。また単位元 $e \in M$ に対して $F(e) = id_{F(*)} = id_X$ だから、

$$ex = F(e)(x) = id_X(x) = x$$

である。

以上より、演算 $M \times X \to X$ $((m, x) \mapsto mx)$ により、モノイド M は集合 X に左から作用しているといえる。

逆に、モノイド M が集合 X に左から作用していれば、関手 $F: \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$ を定めることができる。

このようにして、関手 $F: \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$ と左 M-集合 X を同一視できる。