#3 同型

2021.09.20

定義 $\mathcal{C}$：圏，$a, b \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ とする．

(1) $\mathcal{C}$ の射 $f : a \to b$ が<u>同型射</u> $\overset{\text{def}}{\iff}$ ある射 $g : b \to a$ が存在して，
$g \circ f = \mathrm{id}_a$，$f \circ g = \mathrm{id}_b$ となる．

同型射 $f : a \to b$ に対して，$g \circ f = \mathrm{id}_a$，$f \circ g = \mathrm{id}_b$ をみたす g は
唯一つ存在する．g のことを f の<u>逆射</u>といい，f^{-1} とかく．

∵) 逆射の一意性
$f : a \to b$ に対し，$g, g' : b \to a$ を f の逆射とすると，

$$
\begin{aligned}
g = g \circ \mathrm{id}_b &= g \circ (f \circ g') && (f \circ g' = \mathrm{id}_b \text{ より}) \\
&= (g \circ f) \circ g' && (\text{結合律より}) \\
&= \mathrm{id}_a \circ g' && (g \circ f = \mathrm{id}_a \text{ より}) \\
&= g'
\end{aligned}
$$

となるから，逆射 f^{-1} は各同型射 f に対して一意である．□

(2) a と b が<u>同型</u>（$a \cong b$）$\overset{\text{def}}{\iff}$ ある同型射 $f : a \to b$ が存在する．

Set における同型

Set における同型射 $f : a \to b$ は全単射のことである．
逆射 $f^{-1} : b \to a$ は逆写像のことである．

∵) f が全単射 $\iff$ 逆写像 f^{-1} が存在する．□

集合が同型とは全単射が存在する（$\Rightarrow$ 濃度が同じ）ことである．

Grp における同型

Grp における同型射 $f : a \to b$ は群の同型写像のことである．
逆射 $f^{-1} : b \to a$ は f の逆写像のことである．

∵) 同型写像は全単射だから逆写像をもつ．また，同型写像の
逆写像はまた同型写像である．□

Grp の対象の同型とは群の同型のことである．

同型射と関手

$\mathcal{C}, \mathcal{D}$: 圏, $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$: 関手

$f : a \to b$ が $\mathcal{C}$ の同型射 $\Rightarrow$ $F(f) : F(a) \to F(b)$ も $\mathcal{D}$ の同型射.

特に, $F(f)^{-1} = F(f^{-1})$.

よって, $a \cong b \Rightarrow F(a) \cong F(b)$.

∵) $f : a \to b$ を同型射とする.

$f^{-1} \circ f = id_a$, $f \circ f^{-1} = id_b$ で, これらに F を適用して,

$F(f^{-1} \circ f) = F(f^{-1}) \circ F(f) = id_{F(a)}$

$F(f \circ f^{-1}) = F(f) \circ F(f^{-1}) = id_{F(b)}$

を得る. よって, $F(f) : F(a) \to F(b)$ は同型射である.

また, $F(f^{-1}) \circ F(f) = id_{F(a)}$, $F(f) \circ F(f^{-1}) = id_{F(b)}$ より,

$F(f)^{-1} = F(f^{-1})$ である.

$a \cong b$ ならば, 同型射 $f : a \to b$ が存在し $F(f) : F(a) \to F(b)$

も $\mathcal{D}$ の同型射だから, $F(a) \cong F(b)$ となる. ◻

群の同型と集合の同型

$\mathbf{Set}$ における同型射は全単射のことで, $\mathbf{Grp}$ における同型射は群の同型写像のことであった. (前のページを参照).

G, G' を群とし忘却関手 $U : \mathbf{Grp} \to \mathbf{Set}$ を考えると, 群の同型 $G \cong G'$ が成り立つとき, 集合の同型 $U(G) \cong U(G')$ が成り立つ.

∵) $G \cong G'$ のとき, 群の同型写像 $f : G \to G'$ が存在する.

$U(f) : U(G) \to U(G')$ は $f : G \to G'$ のことであって, 群の同型写像は全単射だから, $U(f)$ は $\mathbf{Set}$ における同型射.

同型射 $U(f) : U(G) \to U(G')$ の存在によって, $U(G) \cong U(G')$ がいえる.

◻