#1. 圏の定義と $\mathbf{Set}$, $\mathbf{Grp}$

2021. 9. 19

定義 圏 (category) $\mathcal{C}$ とは 2つの集まり $Ob(\mathcal{C})$, $Mor(\mathcal{C})$ の組で、以下の条件 (1)〜(4) をみたすもの。

$a \in Ob(\mathcal{C})$ を対象 (Object)、$f \in Mor(\mathcal{C})$ を射 (morphism) という。

(1) 射のドメインとコドメイン

各 $f \in Mor(\mathcal{C})$ に対し、

- ドメイン (domain) : $dom(f) \in Ob(\mathcal{C})$
- コドメイン (codomain) : $cod(f) \in Ob(\mathcal{C})$

が定められている。

$dom(f) = a$, $cod(f) = b$ のとき、

- $f : a \to b$
- $a \xrightarrow{f} b$

のように書く。

この表し方からわかるように、射は2つの対象の間の矢印で、矢印がはじまる対象がドメイン、矢印のおわりがコドメイン。

また、対象 a から対象 b への射の集まりを $Hom_{\mathcal{C}}(a, b)$ とかく。

$$Hom_{\mathcal{C}}(a, b) := \{ f \in Mor(\mathcal{C}) \mid f : a \to b \}$$

※ $a \to b$ への射はただ1つとは限らない。

つまり、$|Hom_{\mathcal{C}}(a, b)| \leq 1$ とは限らない。

2つの対象の間の射は複数あってもよい。(射として「同じ」でないときは、それぞれ別の射とみなす)

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "g"'] & b \end{tikzcd}$$

$f = g$ とは限らない。

(2) 射の合成

ふたつの射 $f, g \in \mathrm{Mor}(\mathcal{C})$ が，$\mathrm{cod}(f) = \mathrm{dom}(g)$ をみたすとき，f と g の合成射 とよばれる射 $g \circ f$ があって，

$$\mathrm{dom}(g \circ f) = \mathrm{dom}(f), \quad \mathrm{cod}(g \circ f) = \mathrm{cod}(g)$$

をみたす.

例 $f : a \to b,\ g : b \to c$ のとき

$\mathrm{cod}(f) = b = \mathrm{dom}(g)$ で，$g \circ f : a \to c$ となる.

$\mathrm{dom}(g \circ f) = \mathrm{dom}(f) = a,\ \mathrm{cod}(g \circ f) = \mathrm{cod}(g) = c$ である.

$$\begin{tikzcd} a \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, "g \circ f"] & \\ b \arrow[r, "g"'] & c \end{tikzcd}$$

(3) 結合律

射の合成は結合律をみたす。つまり，

$f : a \to b,\ g : b \to c,\ h : c \to d$

に対して，

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

← 単にドメイン・コドメインが一致するのではなく，同じ射になる.

が成り立つ.

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "\substack{(h \circ g) \circ f \\ = h \circ (g \circ f)}"] \arrow[d, "f"'] & d \\ b \arrow[r, "g"'] & c \arrow[u, "h"'] \end{tikzcd}$$

(4) 恒等射の存在

各 $a \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対し，恒等射とよばれる射 $\mathrm{id}_a : a \to a$ が存在する. 恒等射は，射の合成に関して単位元となる.

つまり，$f : a \to b$ に対して，$f \circ \mathrm{id}_a = f,\ \mathrm{id}_b \circ f = f$ となる.

$\mathbf{Set}$圏：集合と写像の圏

$\mathrm{Ob}(\mathbf{Set}) :=$ 全ての集合の集まり,

$\mathrm{Mor}(\mathbf{Set}) := \{f \mid f$ はある集合 X からある集合 Y への写像の集まり$\}$

とすると，$\mathbf{Set}$ は圏になる.

∵) (1) 射のドメインとコドメイン

写像 $f: X \to Y$ に対して，$\mathrm{dom}(f) = X$, $\mathrm{cod}(f) = Y$ と定める.

(2) 射の合成

射の合成 $g \circ f$ は通常の写像の合成で定める.

$f: a \to b$, $g: b \to c$ について，$g \circ f: a \to c$ がある.

(3) 結合律

射の合成は通常の写像の合成だから，結合律をみたす.

(4) 恒等射の存在

集合（対象）X に対して恒等射 id_X を恒等写像で定める. 恒等写像は通常の写像の合成に関して，単位元となる.

たとえば $f: X \to Y$ について，

$$\mathrm{id}_Y \circ f = f \quad , \quad f \circ \mathrm{id}_X = f$$

となる. ▨

Grp：群と群準同型の圏

復習 群の定義

集合Gに1つの演算が与えられていて、次の条件を満足するとき、Gはこの演算に関して群をなすという。

(1) 結合律

任意の $a, b, c \in G$ に対して、

$$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$$

(2) 単位元の存在

ある特別な元 $e \in G$ が存在して、任意の $a \in G$ に対し

$$a \circ e = e \circ a = a$$

となる。e を単位元という。

(3) 逆元の存在

任意の $a \in G$ に対して、ある元 $b \in G$ が存在して、

$$a \circ b = b \circ a = e$$

となる。b を a の逆元といい、a^{-1} で表す。

復習 群準同型写像

群 $\langle G, \circ \rangle$ と群 $\langle G', * \rangle$ に対して、G から G' への写像 $f : G \to G'$ が、

「任意の $a, b \in G$ に対して、$f(a \circ b) = f(a) * f(b)$」

をみたすとき、f を G から G' への準同型写像という。

さらに f が全単射のとき、f を同型写像という。

G から G' への同型写像が存在するとき、G と G' は同型であるという。

定義 Grp

$Ob(Grp) :=$ 全ての群の集まり,

$Mor(Grp) := \{f \mid f$ はある群 G からある群 G' への群準同型写像$\}$

とすれば、Grp は圏になる.

(1) 射のドメインとコドメイン

群 G から群 G' への準同型写像 f に対し、

$dom(f) = G$, $cod(f) = G'$

と定める.

(2) 射の合成

射の合成は通常の写像の合成で定める.

群準同型写像どうしの合成は群準同型写像となる.

(3) 結合律

射の合成は通常の写像の合成なので、結合律をみたす.

(4) 恒等射の存在

群 G に対し、恒等射 id_G を恒等写像で定める.

任意の群準同型 $f: G \to G'$ に対して、

$id_{G'} \circ f = f$, $f \circ id_G = f$

をみたす. また、恒等写像は準同型写像である(自己同型写像). ◻