

定義 圏 (category) C とは 2つの集まり $Ob(C)$, $Mor(C)$ の組で、以下の条件 (1) ~ (4) をみたすもの。

$a \in Ob(C)$ を 対象 (Object), $f \in Mor(C)$ を 射 (morphism) といい。

(1) 射のドメインとコドメイン

各 $f \in Mor(C)$ に対し、

- ドメイン (domain) : $dom(f) \in Ob(C)$

- コドメイン (codomain) : $cod(f) \in Ob(C)$

が定められている。

$dom(f) = a$, $cod(f) = b$ のとき、

- $f: a \rightarrow b$

- $a \xrightarrow{f} b$

のように書く。

この表し方からわかるように、射は2つの対象の間の矢印で、矢印がはじまる対象がドメイン、矢印の終わりがコドメイン。

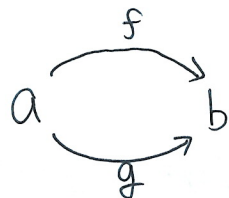
また、対象 a から対象 b への射の集まりを $Hom_C(a, b)$ とかく。

$$Hom_C(a, b) := \{f \in Mor(C) \mid f: a \rightarrow b\}$$

* $a \rightarrow b$ への射はただ1つとは限らない。

つまり、 $|Hom_C(a, b)| \leq 1$ とは限らない。

2つの対象の間の射は複数あってもよい。(射として「同じ」でないときは、それぞれ「別」の射とみなす)



$f = g$ とは限らない。

(2) 射の合成

ふたつの射 $f, g \in \text{Mor}(C)$ が、 $\text{cod}(f) = \text{dom}(g)$ をみたすとき、 f と g の 合成射 とよばれる射 $g \circ f$ があって、

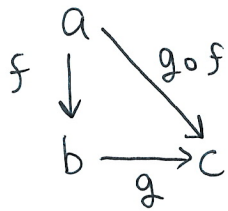
$$\text{dom}(g \circ f) = \text{dom}(f), \quad \text{cod}(g \circ f) = \text{cod}(g)$$

をみたす。

例 $f: a \rightarrow b, g: b \rightarrow c$ のとき

$\text{cod}(f) = b = \text{dom}(g)$ である、 $g \circ f: a \rightarrow c$ となる。

$\text{dom}(g \circ f) = \text{dom}(f) = a, \text{cod}(g \circ f) = \text{cod}(g) = c$ である。



(3) 結合律

射の合成は結合律をみたす。つまり、

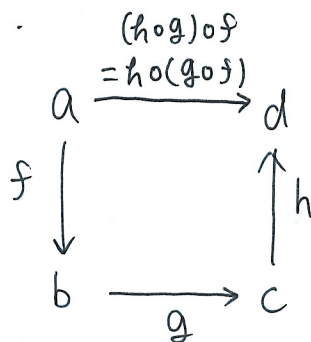
$$f: a \rightarrow b, g: b \rightarrow c, h: c \rightarrow d$$

に対して、

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

が成り立つ。

← 単にドメイン・コドメインが一致するのではなく、同じ射になる。



(4) 恒等射の存在

各 $a \in \text{Ob}(C)$ に対して、恒等射 とよばれる射 $\text{id}_a: a \rightarrow a$ が存在する。恒等射は、射の合成に関して単位元となる。

つまり、 $f: a \rightarrow b$ に対して、 $f \circ \text{id}_a = f, \text{id}_b \circ f = f$ となる。

Set圏 : 集合と写像の圏

$\text{Ob}(\text{Set}) :=$ 全ての集合の集まり,

$\text{Mor}(\text{Set}) := \{f \mid f \text{ は ある集合 } X \text{ からある集合 } Y \text{ への写像の集まり}\}$

とすると, Set は圏になる.

∴ (1) 射のドメインとコドメイン

写像 $f: X \rightarrow Y$ に対して, $\text{dom}(f) = X$, $\text{cod}(f) = Y$ と定める.

(2) 射の合成

射の合成 $g \circ f$ は通常の写真の合成で"定める.

$f: a \rightarrow b$, $g: b \rightarrow c$ について, $g \circ f: a \rightarrow c$ がある.

(3) 結合律

射の合成は通常の写真の合成だから, 結合律をみたす.

(4) 恒等射の存在

集合 (対象) X に対して恒等射 id_X を恒等写像で"定める. 恒等写像は通常の写真の合成に関して, 単位元となる.

たとえば" $f: X \rightarrow Y$ について,

$$\text{id}_Y \circ f = f, \quad f \circ \text{id}_X = f$$

となる.



GRP : 群と群準同型の図

復習 群の定義

集合 G に1つの演算が与えられていて、次の条件を満足するとき、 G はこの演算に関して 群 をなすという。

(1) 結合律

任意の $a, b, c \in G$ に対して、

$$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$$

(2) 単位元の存在

ある特別な元 $e \in G$ が存在して、任意の $a \in G$ に対し

$$a \circ e = e \circ a = a$$

となる。 e を単位元という。

(3) 逆元の存在

任意の $a \in G$ に対して、ある元 $b \in G$ が存在して、

$$a \circ b = b \circ a = e$$

となる。 b を a の逆元といい、 a^{-1} で表す。

復習 群準同型写像

群 $\langle G, \circ \rangle$ と群 $\langle G', * \rangle$ に対して、 G から G' への写像 $f: G \rightarrow G'$ が、

「任意の $a, b \in G$ に対して、 $f(a \circ b) = f(a) * f(b)$ 」
をみたすとき、 f を G から G' への 準同型写像 という。

さらに f が全単射のとき、 f を 同型写像 という。

G から G' への同型写像が存在するとき、 G と G' は 同型である という。

定義 Grp

$Ob(Grp) :=$ 全ての群の集まり,

$Mor(Grp) :=$ " $f | f$ はある群 G からある群 G' への群準同型写像" とすれば, Grp は圏になる.

(1) 射のドメインとコドメイン

群 G から群 G' への準同型写像 f に対し,

$$\text{dom}(f) = G, \quad \text{cod}(f) = G'$$

と定める.

(2) 射の合成

射の合成は通常の写像の合成で"定める.

群準同型写像としての合成は群準同型写像となる.

(3) 結合律

射の合成は通常の写像の合成なので"結合律をみただ.

(4) 恒等射の存在

群 G に対し, 恒等射 id_G を恒等写像で"定める.

任意の群準同型 $f: G \rightarrow G'$ に対して,

$$\text{id}_{G'} \circ f = f, \quad f \circ \text{id}_G = f$$

をみただ. また, 恒等写像は準同型写像である(自己同型写像). \square